北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学试卷（理工类）

2016.5

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,1<2^x<4\}$，$B=\{x\,|\,x-1\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

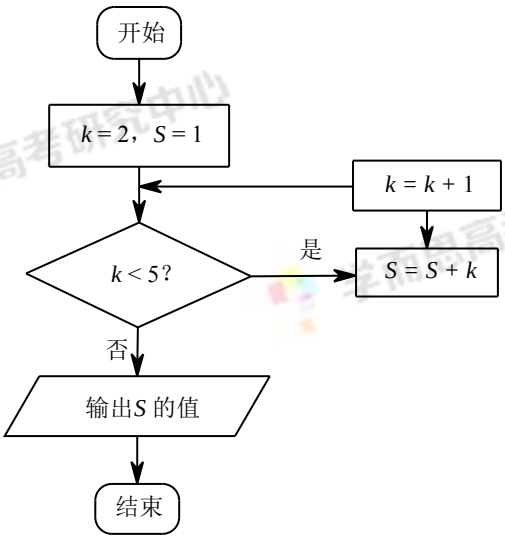
A．$\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$　　B．$\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$　　C．$\{x\,|\,0<x<1\}$　　D．$\{x\,|\,1<x<2\}$

2．复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为

A．6　　B．10　　C．14　　D．15



4．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，“$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$”是“$\vec{a}\,/\!/\,(\vec{a}+\vec{b})$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．同时具有性质："①最小正周期是 π；②图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称；③在区间 $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 上是单调递增函数"的一个函数可以是

A．$y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$　　B．$y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

C．$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 2,\\ 2+\log_a x, & x>2\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的最大值为 1，则 a 的取值范围是

A．$\left[\frac{1}{2},1\right)$　　B．$(0,1)$　　C．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D．$(1,+\infty)$

7．某学校高三年级有四个文科班，四个理科班，现从每个班指定 1 名同学，对各班的卫生进行检查．若每班只安排一人检查，且文科班学生不检查文科班，理科班学生不检查自己所在的班，则不同安排方法的种数是

A．48　　B．72　　C．84　　D．168

8．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 是棱 D_1C_1 的中点，动点 F 在正方体内部或正方体的表面上，且 EF // 平面 A_1BC_1，则动点 F 的轨迹所形成的区域面积是

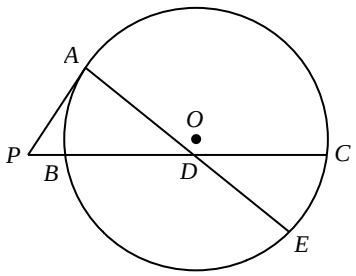
A．$\frac{9}{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{2}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9．双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程是_____；若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点与双曲线 C 的一个焦点重合，则 $p=$_____．

10．如图，P 为⊙O 外一点，PA 是⊙O 的切线，A 为切点，割线 PBC 与⊙O 相交于 B，C 两点，且 $PC=3PA$，D 为线段 BC 的中点，AD 的延长线交⊙O 于点 E．若 $PB=1$，则 PA 的长为_____；$AD\cdot DE$ 的值是_____．



11．已知等边△ABC 的边长为 3，D 是 BC 边上一点，若 $BD=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是_____．

12．已知关于 x，y 的不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant x, \\ x+y \leqslant 2, \\ 2x-y \geqslant k \end{cases}$ 所表示的平面区域 D 为三角形区域，则实数 k 的取值范围是_____．

13．为了响应政府推进“菜蓝子”工程建设的号召，某经销商投资 60 万元建了一个蔬菜加工基地．第一年支出各种费用 8 万元，以后每年支出的费用比上一年多 2 万元．每年销售蔬菜的收入为 26 万元．设 $f(n)$ 表示前 $n\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$ 年的纯利润（$f(n)=$ 前 n 年的总收入-前 n 年的总支出费用-投资额），则 $f(n)=$_____（用 n 表示）；此经销商从第_____年开始盈利．

14．在平面直角坐标系 xOy 中，以点 $A(2, 0)$，曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上的动点 B，第一象限内的点 C，构成等腰直角三角形 ABC，且 $\angle A=90°$，则线段 OC 长的最大值是_____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\cos 2A=-\frac{1}{3}$，$c=\sqrt{3}$，$\sin A=\sqrt{6}\sin C$．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若角 A 为锐角，求 b 的值及 $\triangle ABC$ 的面积．

16．（本小题满分 13 分）

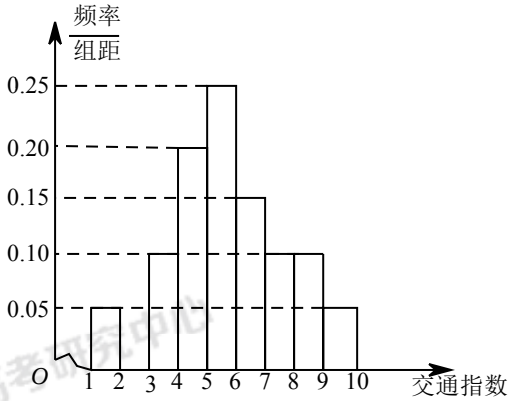
交通指数是交通拥堵指数的简称，是综合反映某区域道路网畅通或拥堵实际情况的概念性指数值，某时间段的交通指数为各实时数据的平均值．交通指数范围为 $(0, 10)$，五个级别规定如下：

交通指数	$(0, 2)$	$[2, 4)$	$[4, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 10)$
级别	畅通	基本畅通	轻度拥堵	中度拥堵	严重拥堵

某人在工作日上班出行每次经过的路段都在同一个区域内，他随机记录了上班的 40 个工作日早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）的交通指数，其统计结果如直方图所示．

（Ⅰ）据此估计此人 260 个工作日中早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）中度拥堵的天数；

（Ⅱ）若此人早晨上班路上所用时间近似为：畅通时 30 分钟，基本畅通时 35 分钟，轻度拥堵时 40 分钟，中度拥堵时 50 分钟，严重拥堵时 70 分钟，以直方图中各种路况的频率作为遇到此种路况的概率，求此人上班路上所用时间 X 的数学期望．



17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$BC=\frac{1}{2}AD=2$，$\angle A=60°$，E 为 AD 的中点，点 O，F 分别为 BE，DE 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle A_1BE$ 的位置，使得平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$（如图 2）.

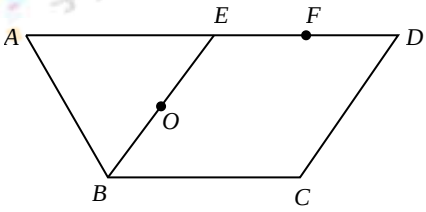


图1

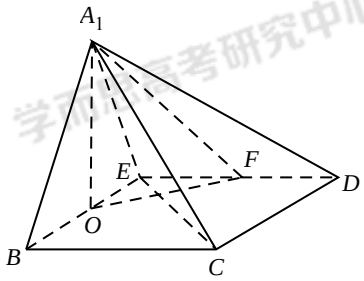


图2

（Ⅰ）求证：$A_1O \perp CE$；

（Ⅱ）求直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）侧棱 A_1C 上是否存在点 P，使得 $BP \parallel$ 平面 A_1OF？若存在，求出 $\frac{A_1P}{A_1C}$ 的值；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x+(1-a)\ln x$，$a \in \mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求曲线 C：$y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $x \in [1,\ 2]$ 时，若曲线 C：$y=f(x)$ 上的点 $(x,\ y)$ 都在不等式组 $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \leqslant y, \\ y \leqslant x+\frac{3}{2} \end{cases}$ 所表示的平面区域内，试求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$ 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过点 P 的直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的离率；

（Ⅱ）若直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 A，B 两点，试求 $\triangle OAB$ 面积的最小值；

（Ⅲ）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，求证：点 Q，P，F_2 三点共线.

20.（本小题满分 13 分）

已知集合 $S=\left\{k \middle| 1 \leqslant k \leqslant \frac{3^n-1}{2},\ k \in \mathbf{N}^*\right\}\left(n \geqslant 2, 且 n \in \mathbf{N}^*\right)$. 若存在非空集合 S_1，S_2，…，S_n，使得 $S=S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$，且 $S_i \cap S_j=\varnothing$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n,\ i \neq j)$，并对任意 x，$y \in S_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$x>y$，都有 $x-y \notin S_i$，则称集合 S 具有性质 P，S_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 称为集合 S 的 P 子集.

（Ⅰ）当 $n=2$ 时，试说明集合 S 具有性质 P，并写出相应的 P 子集 S_1，S_2；

（Ⅱ）若集合 S 具有性质 P，集合 T 是集合 S 的一个 P 子集，设 $T'=\left\{s+3^n \middle| s \in T\right\}$，求证：$\forall x$，$y \in T \cup T'$，$x>y$，都有 $x-y \notin T \cup T'$；

（Ⅲ）求证：对任意正整数 $n \geqslant 2$，集合 S 具有性质 P.