

山西大学附中

2017-2018 学年第一学期高一 12 月（总第三次）模块诊断

数 学 试 题

考试时间：100 分钟 满分：100 分 命题人：陈健、张耀军

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。）

1. 设集合 $A = \{1, 3, 4\}$ ，集合 $B = \{1, 2, 4, 5\}$ ，则集合 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2, 3, 5\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 5, 4\}$

2. 下列函数中，表示同一个函数的是 ()

- A. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $g(x) = x + 1$ B. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$
C. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \log_2 2^x$ D. $f(x) = 2 \lg x$ 与 $g(x) = \lg x^2$

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + 3x - 8$ 的零点 $x_0 \in [a, b]$ ，且 $b - a = 1 (a, b \in \mathbb{N}_+)$ ，则 $a + b =$ ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

4. 若偶函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上是增函数，则函数 $f(x)$ 在区间 $[-4, -1]$ 上是 ()

- A. 减函数且最大值是 $f(-4)$ B. 增函数且最小值是 $f(-1)$
C. 增函数且最大值是 $f(-1)$ D. 减函数且最小值是 $f(-4)$

5. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 - x + a}$ 的定义域为 \mathbb{R} ，则实数 a 的取值范围是 ()

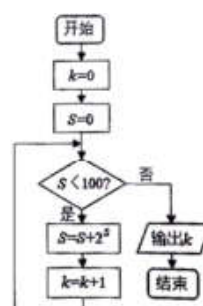
- A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

6. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数，当 $x \in [0, 2)$ 时， $f(x) = 3^x + 1 + b$ ，则 $f\left(\log_3 \frac{1}{2}\right)$ 的值为 ()

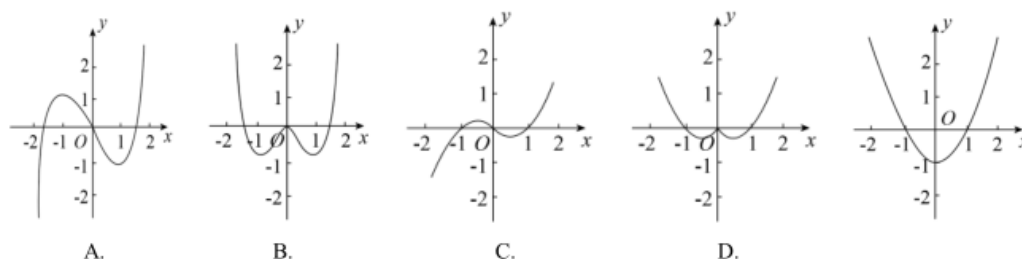
- A. 3 B. $\sqrt{3} + 1$ C. -1 D. -3

7. 执行如图所示的程序框图，输出 k 值是 ()

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 7



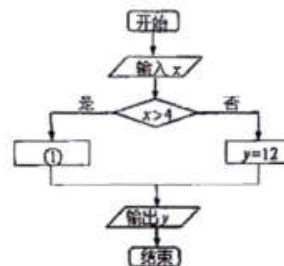
8. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，则函数 $g(x) = f(f(x))$ 的图象可能是 ()



9. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}[x^2 - 2(2a-1)x + 8]$, $a \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为减函数, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $\left[-\frac{4}{3}, 1\right]$

10. 某市乘坐出租车的收费办法如下: (1) 不超过4千米的里程收费12元; (2) 超过4千米的里程按每千米2元收费 (对于其中不足千米的部分, 若其小于0.5千米则不收费, 若其大于或等于0.5千米则按1千米收费); 相应系统收费的程序框图如图所示, 其中 x (单位: 千米) 为行驶里程, y (单位: 元) 为所收费用, 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则图中①处应填 ()



- A. $y = 2\left[x + \frac{1}{2}\right] + 4$ B. $y = 2\left[x + \frac{1}{2}\right] + 5$ C. $y = 2\left[x - \frac{1}{2}\right] + 4$ D. $y = 2\left[x - \frac{1}{2}\right] + 5$

11. 设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 若函数 $f(x)$ 满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$,

则称 $f(x)$ 为“倍缩函数”, 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + t)$ 为“倍缩函数”, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $(0, 1)$ C. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

12. 函数 $f(x) = \frac{b}{|x| - a}$ ($a > 0, b > 0$) 的图象形如汉字“囧”, 故称其为“囧函数”. 下列命题: ①“囧函数”的值域为 \mathbb{R} ; ②“囧函数”在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; ③“囧函数”图象关于 y 轴对称; ④“囧函数”由两个

零点; ⑤“囧函数”的图象与直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0$) 至少有一个交点. 正确的命题个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分.)

13. 二进制数 $1010100_{(2)}$ 转化为十进制数等于_____.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ 的两个零点分别位于区间 $(1, 2)$ 和 $(2, 3)$ 内, 则 a 的取值范围为_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

成立, 则当 $f(2a^2 + a + 2) < f(2a^2 - 2a + 4)$ 时, 实数 a 的取值范围为_____.

16. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2 + 2}{x}, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$,

$g(x) = ax + 1$, 对任意 $x_1 \in [-2, 0]$, 存在 $x_2 \in [-2, 1]$ 使得 $g(x_2) = f(x_1)$, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题（本题共 5 小题，共 52 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$ ， $B = \left\{x \left| 2^{3x-7} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-8} \right.\right\}$ ．

（1）求 $(\complement_U A) \cap B$ ；

（2）若集合 $C = \{x | 2x + a > 0\}$ ，且 $B \cup C = C$ ，求 a 的取值范围．

18.（本小题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ ，当 $x, y \in \mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ．

（1）求 $f(0)$ 的值，并证明函数 $f(x)$ 为奇函数；

（2）如果 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ 且 $f(1) = -\frac{1}{2}$ ，试求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 6]$ 上的最大值和最小值．

19.（本小题满分 10 分）经市场调查，某门市部的一种小商品在过去的 20 天内的日销售量（件）与价格（元）均为时间 t （天）的函数，且日销售量近似满足函数 $g(t) = 80 - 2t$ （件），而且销售价格近似满足于

$$f(t) = \begin{cases} 15 + \frac{1}{2}t & (0 \leq t \leq 10) \\ 25 - \frac{1}{2}t & (10 \leq t \leq 20) \end{cases} \quad (\text{元}).$$

（1）试写出该种商品的日销售额 y 与时间 t ($0 \leq t \leq 20$) 的函数表达式；

（2）求该种商品的日销售额 y 的最大值与最小值．

20. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

(1) 当 $x \in (0, 1]$ 时, 若 $m > 0$, 求函数 $F(x) = f(x) - (m-1)x$ 的最小值;

(2) 若函数 $G(x) = 2^{f(x)}$ 的图象与直线 $y = 1$ 恰有两个不同的交点 $A(x_1, 1)$, $B(x_2, 1)$ ($0 \leq x_1 < x_2 \leq 3$), 求实数 m 的取值范围.

21. (本题满分 12 分) 对于在 $[a, b]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$, $g(x)$, 如果对任意的 $x \in [a, b]$, 均有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是接近的, 否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是非接近的. 现在有两个函数 $f(x) = \log_t(x - 3t)$ 与 $g(x) = \log_t\left(\frac{1}{x-t}\right)$ ($t > 0$ 且 $t \neq 1$), 现给定区间 $[t+2, t+3]$.

(1) 若 $t = \frac{1}{2}$, 判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否在给定区间上接近;

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在给定区间 $[t+2, t+3]$ 上都有意义, 求 t 的取值范围;

(3) 讨论 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在给定区间 $[t+2, t+3]$ 上是否是接近的.