

北京市朝阳区 2015-2016 学年度高三年级第一学期期中统一考试

数学答案（文史类）

2015.11

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	A	B	B	C	C

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	-1,1	15	①④	$2, \frac{\pi}{2}$	$[1, +\infty)$	$(-2, 6)$

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

（I）由已知可得：

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 1$$

$$= 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) + 1.$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π7 分

$$\text{（II）由 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{因此函数 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } [2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

.....13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（I）依题意，

$$\begin{cases} 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = 15, \\ (a_1 + 3d)^2 = a_1(a_1 + 12d). \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2. \end{cases}$$

因此 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$, 即 $a_n = 2n + 1$6 分

(II) 依题意, $b_n = a_{2^n} = 2 \times 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$.

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (2^2 + 1) + (2^3 + 1) + \cdots + (2^{n+1} + 1) \\ &= 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} + n \\ &= \frac{4(1 - 2^n)}{1 - 2} + n \\ &= 2^{n+2} + n - 4. \end{aligned}$$

.....13 分

17. (本小题满分 14 分)

(I) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 因为 $CC_1 \perp$ 底面 ABC , $AC \subset$ 底面 ABC ,

所以 $CC_1 \perp AC$.

又 $AC \perp BC$, $BC \cap CC_1 = C$,

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

而 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

则 $AC \perp BC_1$.

.....4 分

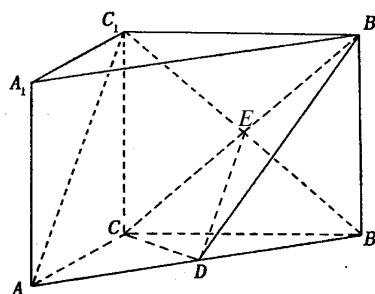
(II) 设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E , 连结 DE ,

因为 D 是 AB 的中点, E 是 BC_1 的中点,

所以 $DE \parallel AC_1$.

因为 $DE \subset$ 平面 CDB_1 , $AC_1 \not\subset$ 平面 CDB_1 ,

所以 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 .



.....9 分

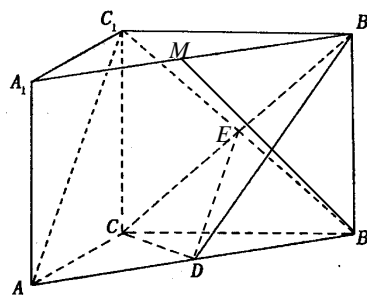
(III) 在线段 A_1B_1 上存在点 M , 使得 $BM \perp CB_1$, 且 M 为线段 A_1B_1 的中点.

证明如下: 因为 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $CD \subset$ 底面 ABC ,

所以 $AA_1 \perp CD$.

由已知 $AC = BC$, D 为线段 AB 的中点,
所以 $CD \perp AB$.

又 $AA_1 \cap AB = A$,



所以 $CD \perp$ 平面 AA_1B_1B .

取线段 A_1B_1 的中点 M , 连接 BM .

因为 $BM \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $CD \perp BM$.

由已知 $AB = 2AA_1$, 由平面几何知识可得 $BM \perp B_1D$.

又 $CD \cap B_1D = D$, 所以 $BM \perp$ 平面 B_1CD .

又 $B_1C \subset$ 平面 B_1CD ,

所以 $BM \perp CB_1$.

.....14 分

18. (本小题满分 13 分)

(I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos B = -\frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } B = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\text{可得 } \frac{2}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 则 } \sin A = \frac{1}{2}.$$

又 A 为锐角, 则 $A = \frac{\pi}{6}$, 所以 $C = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3}. \quad \text{.....6 分}$$

$$(II) \quad \sin A \cdot \sin C = \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right) \cdot \sin C$$

$$= \sin C \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{1}{2} \sin C\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2C - \frac{1}{4} (1 - \cos 2C)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin\left(2C + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}.$$

因为 $C \in (0, \frac{\pi}{3})$,

所以 $2C + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

则 $\sin(2C + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$.

所以 $\sin A \cdot \sin C$ 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}]$13 分

19. (本小题满分 13 分)

解: (I) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{a}{x} + x - (a+1) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-1)(x-a)}{x}.$$

又因为函数 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 单调减, 所以不等式 $(x-1)(x-a) \leq 0$ 在 $(1, 3)$ 上成立.

设 $g(x) = (x-1)(x-a)$, 则 $g(3) \leq 0$, 即 $9 - 3(a+1) + a \leq 0$ 即可, 解得 $a \geq 3$.

所以 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$7 分

(II) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -\ln x + \frac{x^2}{2}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + x = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍).

当 x 变化时, $f(x), f'(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = \frac{1}{2}$.

所以 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 成立.13 分

20. (本小题满分 14 分)

解: 因为 $f(x) = e^x(ax^2 + bx + 1)$, 所以 $f'(x) = e^x[ax^2 + (2a+b)x + b+1]$.

因为 $f'(-1) = 0$, 所以 $a - (2a+b) + b+1 = 0$.

所以 $a = 1$2 分

(I) 当 $a=1$ 时, $b=1$ 时, $f(0)=1, f'(0)=2$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$.

即 $2x-y+1=0$4 分

(II) 由已知得 $f(x)=e^x(x^2+bx+1)$,

所以 $f'(x)=e^x[x^2+(2+b)x+b+1]=e^x(x+1)(x+b+1)$.

(1) 当 $-b-1 < -1$, 即 $b > 0$ 时,

令 $f'(x)=e^x(x+1)(x+b+1) > 0$ 得, $x > -1$ 或 $x < -b-1$;

令 $f'(x)=e^x(x+1)(x+b+1) < 0$ 得, $-b-1 < x < -1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 和 $(-\infty, -b-1)$ 上单调递增, 在 $(-b-1, -1)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 $f(-1)=e^{-1}(2-b)=0$.

解得 $b=2$. 显然合题意.

(2) 当 $-b-1 = -1$ 时, 即 $b=0$ 时,

$f'(x)=e^x(x+1)^2 \geq 0$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 $f(-1)=e^{-1}(2-b)=0$.

解得 $b=2$. 显然不符合题意.

(3) 当 $-b-1 > -1$ 时, 即 $b < 0$ 时,

令 $f'(x)=e^x(x+1)(x+b+1) > 0$ 得, $x < -1$ 或 $x > -b-1$;

令 $f'(x)=e^x(x+1)(x+b+1) < 0$ 得, $-1 < x < -b-1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-b-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, -b-1)$ 上单调递减.

①若 $-b-1 \geq 1$, 即 $b \leq -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 $f(1)=e(2+b)=0$.

解得 $b=-2$. 显然合题意.

②若 $-b-1 < 1$, 即 $-2 < b < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在在 $(-1, -b-1)$ 上单调递减, 在 $(-b-1, 1)$ 上单调递增.

此时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 $f(-b-1)=e^{-b-1}(b+2)=0$.

解得 $b=-2$. 显然不合题意.

综上所述, $b=2$ 或 $b=-2$ 为所求.14 分