丰台区 2015-2016 年第一学期期末练习

高三数学（理科）参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	C	A	B	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9． -84　　10． -2　11． 18　　12. 3　　13． $\frac{16}{3}$　　14． 1， $[e-1,+\infty)$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．(本小题共 13 分)

解：（Ⅰ）根据余弦定理： $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{(3\sqrt6)^2+(5\sqrt6)^2-12^2}{2\cdot3\sqrt6\cdot5\sqrt6}=\dfrac13$ ………6 分

（Ⅱ）因为 $0<C<\pi$， 所以 $\sin C>0$

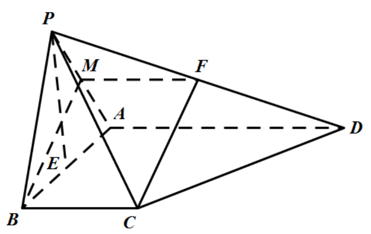
$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac13)^2}=\frac{2\sqrt2}{3}$$

根据正弦定理得： $\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$

$AD=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin\angle ADC}=8$ …………………………13 分

16．(本小题共 14 分)

解：（Ⅰ）取 AP 的中点 M， 连接 MF,MB，



因为 M 是 AP 中点， F 是 PD 中点，

所以 $MF\parallel AD, MF=\frac12 AD$，

又因为 $BC\parallel AD, BC=\frac12 AD$，

所以四边形 $BCFM$ 是平行四变形

$FC\parallel BM, FC\not\subset$ 面 ABP，　$BM\subset$ 面 ABP

所以 $FC\parallel$ 面 ABP …………………………5 分

（Ⅱ）连接 CE，

因为在 ΔABP 中， $AB=AP=BP$， 点 E 是边 AB 在的中点，

所以 $PE\perp AB$ 且 $PE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt3$，

在 $Rt\Delta BEC$ 中， $BE=EC=1$， $EB\perp BC$， 所以 $EC=\sqrt2$

在 ΔPEC 中，$PE=\sqrt{3}$，$EC=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{5}$，

所以 $PE\perp EC$

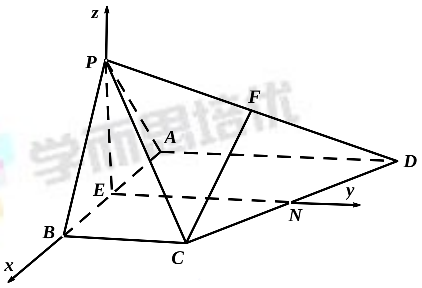
又因为 $AB\cap EC=E, AB\subset$ 面 $ABCD$，$EC\subset$ 面 $ABCD$

所以 $PE\perp$ 面 $ABCD$ …………………………9 分

（Ⅲ）取 CD 中点 N，以 EB，EN，EP 分别为轴 x，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

各点坐标为：$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$B(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(-1,0,0)$

因为：$BC\perp PE$，$AB\perp BC$



所以 $BC\perp$ 面 ABP

面 ABP 的法向量为 $\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$

设面 ABP 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_0,y_0,z_0)$

$\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0+\sqrt{3}z_0=0\\ 2x_0+y_0=0\end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_2}=(1,-2,-\frac{\sqrt{3}}{3})$$

由图可知二面角为锐二面角，设锐二面角为 θ

$$\cos\theta=|\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

二面角 $B-PA-C$ 余弦值为：$\cos\theta=|\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………………14 分

17．(本小题共 14 分)

解：（Ⅰ）$P_1=\frac{C_3^1\cdot C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{2}$

所以这 4 人中恰好有 1 人是志愿者的概率为 $\frac{1}{2}$ …………………………5 分

（Ⅱ）$P_2=C_4^1(\frac{3}{10})^1\cdot(\frac{7}{10})^3=0.4116$

所以这 4 人中恰好有 1 人是志愿者的概率为 $\frac{1}{2}$ …………………………10 分

（Ⅲ）$P_1>P_3>P_2$ …………………………14 分

18．(本小题共 13 分)

解：（Ⅰ） $f'(x)=ax^2+2x$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x_2=0$，$x_3=-\dfrac{2}{a}$.

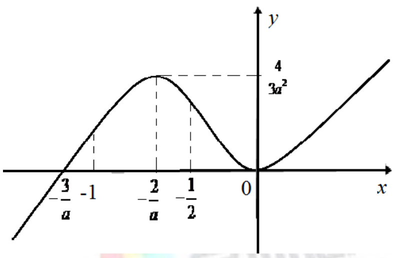
x	$(-\infty,-\dfrac{2}{a})$	$-\dfrac{2}{a}$	$(-\dfrac{2}{a},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	_	0	+
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

∴函数 $y=f(x)$ 的极大值为 $f(-\dfrac{2}{a})=\dfrac{1}{3}a\cdot(-\dfrac{2}{a})^3+(-\dfrac{2}{a})^2=\dfrac{4}{3a^2}$； 极小值为 $f(0)=0$.

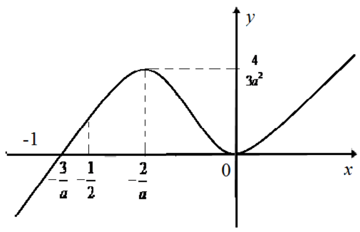
……………………………8 分

(Ⅱ) 若存在 $x_0\in(-1,-\dfrac{1}{2})\cup(-\dfrac{1}{2},0)$，使得 $f(x_0)=f(-\dfrac{1}{2})$，则

由（Ⅰ）可知，需要 $\begin{cases}-\dfrac{2}{a}<-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{2}{a}>-1,\\f(-1)<f(-\dfrac{1}{2})\end{cases}$ （如图 1）或 $-\dfrac{3}{a}<-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{2}{a}$ （如图 2）.



（图 1）



（图 2）

于是可得 $a\in(\dfrac{18}{7},4)\cup(4,6)$.　　　　……………………………13 分

19．(本小题共 13 分)

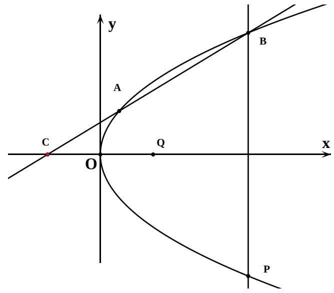
（Ⅰ）有题意可知：$RN=RM$，即点 R 到直线 $x=-1$ 和点 M 的距离相等.

根据抛物线的定义可知：R 的轨迹为抛物线，其中 M 为焦点.

设 R 的轨迹方程为：$y^2=2px$，$\dfrac{p}{2}=1$，　$p=2$

所以 R 的轨迹方程为：$y^2=4x$.　　　　……………………………5 分

（Ⅱ）由条件可知 $C(-\frac{b}{k},0)$，则 $Q(\frac{b}{k},0)$.



联立 $\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=4x \end{cases}$,消去 y 得 $k^2x^2+(2bk-4)x+b^2=0$，

$\Delta=(2bk-4)^2-4b^2k^2=16(1-bk)>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$，则 $P(x_2,-y_2)$

$x_1+x_2=\frac{4-2bk}{k^2}$　　，　　$x_1=\frac{4-2bk-4\sqrt{1-bk}}{2k^2}$　　，

$x_2=\frac{4-2bk+4\sqrt{1-bk}}{2k^2}$.

因为　$k_{AP}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\frac{k(x_1+x_2)+2b}{\frac{-8\sqrt{1-bk}}{2k^2}}=\frac{-k}{\sqrt{1-bk}}$，

$$k_{AQ}=\frac{y_1-0}{x_1-\frac{b}{k}}=\frac{k(kx_1+b)}{kx_1-b}=\frac{2(1-\sqrt{1-bk})}{\frac{2[(1-bk)-\sqrt{1-bk}]}{2k}}=\frac{2k}{-\sqrt{1-bk}}$$

所以　$k_{AP}=k_{A}$，A,P,Q 三点共线 .　　　　…………………………13 分

20. （本小题共 13 分）

（Ⅰ）证明：因为 $a_{k+1}-a_k=a_i>0$（$i\le k,k=1,2,3,\cdots,n-1$），

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，即 $1<a_2<a_3<\cdots<a_n$.

又因为 $a_{k+1}-a_k=a_i\ge 1(i\le k,k=1,2,3,\cdots,n-1)$，

所以 $a_{k+1}-a_k\ge 1(k=1,2,3,\cdots,n-1)$.　　　　…………………………3 分

（Ⅱ）解：因为 $a_2-a_1=a_1$，所以 $a_2=2a_1$；

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2.

因为 $a_{k+1}-a_k=a_i(i\le k,k=1,2,3,\cdots,n-1)$，所以当 $i=k$ 时有 $a_{k+1}=2a_k$.

这说明在已知条件下，可以得到唯一的等比数列.

所以 $a_n=2^{n-1}$.　　　　…………………………8 分

（Ⅲ）证明：因为 $1=a_1=1$，

$2=a_2=2$,

$3\le a_3\le 2^2$，

$4\le a_4\le 2^3$

$\cdots$　$n\le a_n\le 2^{n-1}$

由上面 n 个式子相加，得到：

$1+2+3+\cdots+n \le a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \le 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，

化简得 $\dfrac{n(n+1)}{2}<(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<(2^n-1)$

所以$\dfrac{1}{2}n(n+1)\le S_n \le 2^n-1$.　　　　　　　　………13 分